Eine Theorie

der

gebrochenen Focaldistanzen

für das

elliptische und hyperbolische Paraboloid

zu entwickeln.

Preisarbeit

der

philosophischen Fakultät zu Rostock 1895

bearbeitet von

Ernst Sträde

aus Güstrow.

Rostock.

Universitäts-Buchdruckerei von Adler's Erben.

1896.

Referent Herr Professor Dr. Staude.

Einleitung.

Die in nachstehender Arbeit angewendeten Sätze und Formeln aus der analytischen Geometrie des Raumes sind den Vorlesungen Hesse's hierüber entnommen.

Während die Eigenschaften eines Systems confocaler centrischer Flächen zweiten Grades schon vielfach untersucht sind, werden die der confocalen Paraboloide meist nur kurz behandelt. Eine grössere Untersuchung „Ueber homofocale Paraboloide" von Herrn Dr. Otto Böklen findet sich jedoch in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik im fünfunddreissigsten Teil. Die parabolischen Coordinaten finden sich auf Seite 303 des ersten Teils des Raumes von Clebsch-Lindemann eingeführt, wo auch eine Differentialgleichung der geodätischen Linien auf den Paraboloiden abgeleitet ist. Die in nachfolgender Abhandlung angewendete Bezeichnungsweise ist so gewählt worden, wie sie in einer Arbeit im 41. Bande der „Mathematischen Annalen" von Herrn Professor Staude gebraucht wird. Letzterer hat in neuester Zeit auch eine kurze Abhandlung über die Focaleigenschaften der confocalen Paraboloide veröffentlicht.

In nachstehender Arbeit behandeln die drei ersten Paragraphen ein System confocaler Parabeln; § 1 und § 2 im Wesentlichen die Fadenconstruction der Parabel und § 3 die Ableitung der Gleichungen und Eigenschaften dieses Systems aus denen der confocalen centrischen

Kegelschnitte. In § 4 sind dann die später gebrauchten Eigenschaften des Systems der confocalen Paraboloide bewiesen und die der Arbeit zu Grunde liegenden parabolischen Coordinaten eingeführt, deren Beziehungen zu den rechtwinkeligen in § 5 abgeleitet sind. In § 6 ist gezeigt, wie man sich das in Betracht gezogene System aus dem der confocalen centrischen Flächen zweiten Grades entstanden und danach den Verlauf der Paraboloide im Unendlichen denken kann. Da die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen sich im Wesentlichen auf die Krümmungscurven, geodätischen Linien und gemeinsamen Tangenten der Paraboloide aufbaut, sind nun in den §§ 7—12 die Differentialgleichungen und Linienelemente dieser drei Curven abgeleitet, sowie ihr Verlauf und ihre Realität discutiert. Zu der in § 14 bewiesenen Fadenconstruction des elliptischen Paraboloides bringt § 13 vorher einige dazu nötige Sätze über gewisse Combinationen jener drei Curvenarten. In § 15 sind einige Specialfälle der Construction abgeleitet, im besonderen die mittels zwei zusammengehöriger Focalparabeln, auf welcher sich dann schliesslich die in § 16 aufgestellte Theorie der gebrochenen Focaldistanzen gründet.

Zum Schlusse erlaube ich mir auch an dieser Stelle, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Staude für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das Interesse, welches er derselben hat zu Teil werden lassen, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

§ 1.

Fadenconstruction der Parabel aus einer gegebenen Parabel.

Ein System confocaler Parabeln ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha - t} + 2y + t = 0, \qquad (1)$$

worin der Parameter t einen Wert λ oder μ annehmen kann, wenn

$$-\infty < \lambda < \alpha < \mu < +\infty$$

ist. Aus der Determinante der Gleichung (1)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha - t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}$$

findet man auf bekannte Weise als Determinante der Gleichung in Liniencoordinaten:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{\alpha - t} & -\frac{1}{\alpha - t} \\ 0 & \frac{-1}{\alpha - t} & 0 \end{vmatrix},$$

woraus man als Gleichung der confocalen Parabeln in Liniencoordinaten findet:

$$-\xi^2 + \frac{t}{\alpha - t}\eta_1^2 - \frac{2}{\alpha - t}\eta_1 = 0$$

oder:

$$(\alpha - t)\xi^2 - t\eta_1^2 + 2\eta_1 = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte (x, y) und (x + dx, y + dy) ist in laufenden Coordinaten $\xi_1 \eta_1$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\xi_1 dy + \eta_1 dx + x dy - y dx = 0. \tag{3}$$

Die sich hieraus ergebenden Coordinaten dieser Linie

$$\frac{-dy}{x dy - y dx}, \quad \frac{dx}{x dy - y dx}$$

müssen, wenn sie Tangente an die Parabel t sein soll, der Gleichung (2) genügen. Dadurch erhält man als Differentialgleichung der Parabel t:

$$(\alpha - t) dy^2 - t dx^2 + 2 dx (x dy - y dx) = 0$$

oder:

$$(\alpha - t) dy^2 - (t + 2y) dx^2 + 2x dx dy = 0. \tag{4}$$

Bekanntlich stehen die rechtwinkeligen und die parabolischen Coordinaten λ, μ in folgenden Beziehungen:

$$\begin{cases} x^2 = -(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu), & y = \dfrac{\alpha - \lambda - \mu}{2}, \\ dx = \dfrac{(\alpha - \mu) d\lambda + (\alpha - \lambda) d\mu}{2\sqrt{[-(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)]}}, & dy = -\dfrac{1}{2}(d\lambda + d\mu) \end{cases} \tag{5}$$

Diese Werte in (4) eingesetzt ergeben:

$$\left((\alpha - t) + \frac{(\alpha - \mu)}{(\alpha - \lambda)}(\alpha - \lambda - \mu + t) - 2(\alpha - \mu)\right) d\lambda^2$$

$$+ \left((\alpha - t) + \frac{\alpha - \lambda}{\alpha - \mu}(\alpha - \lambda - \mu + t) - 2(\alpha - \lambda)\right) d\mu^2 = 0$$

oder:

$$d\lambda^2 \frac{(\mu - \lambda)(\mu - t)}{\alpha - \lambda} + d\mu^2 \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - t)}{\alpha - \mu} = 0$$

oder:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{[(\alpha - \lambda)(t - \lambda)]}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{[(\mu - t)(\mu - \alpha)]}} = 0 \tag{6}$$

als separierte Form der Differentialgleichung der Tangente an die Parabel t.

Das Linienelement erhält mittels der Gleichung (5) in parabolischen Coordinaten die Form:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{\mu-\lambda}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{\alpha-\lambda} - \frac{d\mu^2}{\alpha-\mu}\right). \qquad (7)$$

Hieraus erhält man als Linienelement der Parabel $\lambda = \lambda_0$:

$$ds = \pm \frac{d\mu}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}. \qquad (8)$$

Um das Linienelement der Tangente an $\lambda = \lambda_0$ zu finden, setzt man in (6) $t = \lambda_0$ und quadriert; dies giebt:

$$d\lambda^2(\mu-\lambda_0)(\alpha-\mu) + d\mu^2(\alpha-\lambda)(\lambda-\lambda_0) \pm 2d\lambda\, d\mu\sqrt{[(\alpha-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\mu-\alpha)]} = 0.$$

$$d\lambda^2\frac{\mu-\lambda_0}{\alpha-\lambda} + d\mu^2\frac{\lambda-\lambda_0}{\alpha-\mu} \pm 2d\lambda\, d\mu\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda)(\mu-\alpha)}} = 0.$$

$$\frac{d\lambda^2}{4}\frac{(\lambda-\lambda_0)-(\lambda-\mu)}{\alpha-\lambda} + \frac{d\mu^2}{4}\frac{(\lambda-\mu)-(\lambda_0-\mu)}{\alpha-\mu} \pm \frac{2d\lambda\, d\mu}{4}\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda)(\mu-\alpha)}} = 0.$$

$$\frac{\lambda-\mu}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{\alpha-\lambda} - \frac{d\mu^2}{\alpha-\mu}\right) = \frac{d\lambda^2}{4}\frac{\lambda-\lambda_0}{\alpha-\lambda} + d\mu^2\frac{\mu-\lambda_0}{\alpha-\mu} \pm \frac{2d\lambda\, d\mu}{4}\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda)(\mu-\alpha)}} = 0.$$

Gemäss (7) ergiebt sich hieraus nach Ausziehen der Wurzel als Linienelement der Tangente an die Parabel λ_0:

$$ds = \frac{d\lambda}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} \mp \frac{d\mu}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}. \qquad (9)$$

Denkt man sich einen Faden von unendlicher, aber unveränderlicher Länge um die Parabel λ_0 geschlungen und durch einen Punkt P (λ, μ) gespannt, so wird er seiner geometrischen Gestalt nach sich aus zwei Bögen der Parabel λ_0 und aus den beiden von P an dieselbe

gezogenen gradlinigen Tangenten zusammensetzen. Das Linienelement des Fadens drückt sich daher durch die Gleichungen (8) und (9) aus, die wir aber durch

$$(10) \qquad ds = \frac{d\lambda}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} \pm \frac{d\mu}{2}\sqrt{\frac{\mu-\lambda_0}{\mu-\alpha}}$$

zusammenfassen können.

Um die Vorzeichen bestimmen zu können, beachten wir, dass λ seinen Maximalwert nur auf der vom Brennpunkte F (vgl. Fig. I) ausgehenden, in negativer Richtung verlaufenden halben y-Achse, μ seinen Minimalwert dagegen auf dem andern von F ausgehenden, in positiver Richtung verlaufenden Halbstrahle annimmt. Da die Gleichung (2) in t linear ist, berührt eine Tangente an eine Parabel keine zweite desselben Systems. Wie man sich leicht überzeugt, kann infolgedessen das Vorzeichen von $d\lambda$ auf jeder der Tangenten sich nicht ändern und ist vom Punkte P aus gerechnet positiv. Das Vorzeichen von $d\mu$ kann sich nur auf der y-Achse umkehren; es ist daher von P aus gerechnet auf der einen Tangente t'' stets positiv, auf der andern im allgemeinsten Fall von P bis C, dem Schnittpunkt von t' mit der y-Achse, negativ und von da ab wieder positiv. Auf der Parabel λ_0 nimmt μ von dem Schnittpunkte D mit der y-Achse aus nach beiden Richtungen hin zu.

Messen wir die Differentiale $d\lambda$ und $d\mu$ längs der Tangenten stets in der Richtung von P aus, so können wir den ersten Term in der Differentialgleichung (6) stets positiv nehmen, wenn wir dem zweiten das negative, d. h. der Wurzel das umgekehrte Vorzeichen von $d\mu$ geben. Wie man nun aus der Ableitung der Gleichung (9) aus (6) sehen kann, ist dem Gliede mit $d\mu$ in ersterer das entgegengesetzte Vorzeichen wie in letzterer zu geben, d. h. wir müssen das fragliche Vorzeichen in der Gleichung des Linienelementes stets so wählen, dass jeder Term an und für sich positiv wird.

Da die Länge des um die Parabel geschlungenen und durch P gespannten Fadens und die Länge der Parabel selbst stets constant ist, so muss auch ihre Differenz constant, etwa = c sein; also

$$AP + PC - BDA = c.$$

Wir erhalten hieraus durch Integration der Gleichung (10) gemäss der Vorzeichenbestimmung, da auch das Linienelement der Parabel stets positiv zu nehmen ist:

$$\int_P^A \left(d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} + d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}\right) + \int_P^C \left(d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} + d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}\right)$$

$$+ \int_C^B \left(d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} + d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}\right) - \int_D^B d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} - \int_D^A d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} = c,$$

oder:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} + \int_{\mu_1}^{\mu''} d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} + \int_{\alpha}^{\mu_1} d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}}$$

$$+ \int_{\alpha}^{\mu'} d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} + \int_{\mu'}^{\alpha} d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} + \int_{\mu''}^{\alpha} d\mu \sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{\alpha-\mu}} = 2c.$$

Wie man sieht, reduziert sich dies aber auf die Gleichung:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda}{\alpha-\lambda}} = c.$$

Da dies von μ_1 unabhängig ist, so ist der Ort des Punktes P (λ_1 μ_1) eine mit $\lambda = \lambda_0$ confocale Parabel.

Heften wir daher einen Faden von constanter Länge mit seinen beiden Endpunkten an zwei Punkte einer Parabel an, die durch den Scheitelpunkt der letzteren getrennt sind, und spannen den Faden in der Ebene durch

eine Spitze, so beschreibt diese einen Bogen einer confocalen Parabel, so lange auf beiden Seiten wenigstens ein kleines Ende des Fadens auf der gegebenen Parabel aufliegt.

§ 2.

Specialfall: $\lambda_0 = \alpha$.

Fadenconstruction der Parabel aus einer Graden und einem Punkte.

Wird $\lambda_0 = \alpha$ gesetzt, d. h. nimmt man als gegebene Parabel eine in einem Halbstrahl degenerierte, so wird die eine Tangente zur Verbindungslinie des Punktes P mit dem Endpunkte D der Parabel (vgl. Fig. Ia), die andere wird parallel dem gegebenen Halbstrahle. Wir nehmen nun irgend eine, den letzteren schneidende und zu ihm senkrechte gerade Linie AB an. Der durch P über die Parabel gespannte Faden ist also PDA ∞ CP. So lange P bei seiner Bewegung AB nicht erreicht, bleiben D ∞ und C ∞ constant; es muss also auch die Länge des übrigen Fadens, d. h. DPC constant sein. Dies lässt sich folgendermassen ausdrücken:

„Ist eine Parabel und eine zu ihrer Achse senkrechte Grade gegeben, so ist die Summe der Entfernungen eines Punktes P der Parabel von ihrem Brennpunkte und der gegebenen Graden constant und zwar gleich dem Abstande des Brennpunktes von einem Schnittpunkte der Graden und der Parabel, so lange P und der unendlich ferne Scheitelpunkt der Parabel auf verschiedenen Seiten der Graden liegen.“ Heftet man das eine Ende eines Fadens in einem Punkte einer Ebene an, lässt das andere auf einer Graden der Ebene (ohne Reibung) gleiten und spannt den Faden durch eine Spitze, so beschreibt diese in der Ebene eine Parabel, so lange sie mit dem gegebenen Punkt auf derselben Seite der gegebenen Graden sich bewegt.

§ 3.

Ueberführung eines Systems confocaler centrischer Kegelschnitte in ein System confocaler Parabeln.

Eine Parabel können wir uns aus einer Ellipse entstanden denken, indem wir den einen Scheitelpunkt der grossen Achse im Endlichen festhaltend, die kleine Achse unendlich gross von der ersten, die grosse Achse unendlich gross von der zweiten Ordnung werden lassen. Wir gelangem dem entsprechend von einem System confocaler centrischer Kegelschnitte zu einem System confocaler Parabeln, wenn wir auf die Gleichung des ersteren:

$$\frac{y'^2}{\beta'-t'} + \frac{x'^2}{\alpha'-t'} = 1 \qquad (\beta > \alpha) \qquad (1)$$

die Transformation

$$\left.\begin{aligned} y' &= y + \sqrt{\beta}, \quad x' = x, \\ \alpha' &= \omega\alpha, \quad \beta' = \omega^2, \quad t' = \omega t \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

anwenden und ω unendlich gross werden lassen. Dies giebt:

$$\frac{x^2}{\omega(\alpha-t)} + \frac{(y+\omega)^2}{\omega(\omega-t)} = 1.$$

$$\frac{x^2}{\omega(\alpha-t)} + \frac{y^2}{\omega(\omega-t)} + \frac{2y\omega}{\omega(\omega-t)} + \frac{\omega t}{\omega(\omega-t)} = 0.$$

$$\frac{x^2}{\alpha-t} + \frac{y^2}{\omega-t} + \frac{2y\omega}{\omega-t} + \frac{\omega t}{\omega-t} = 0.$$

Für $\omega = \infty$ ergiebt sich hieraus die Gleichung des Systems confocaler Parabeln:

$$\frac{x^2}{\alpha-t} + 2y + t = 0.$$

Mit Hülfe dieser Transformation (2) können in ähnlicher Weise alle Formeln des einen Systems auf die des andern transformiert werden.

Als Beispiel wollen wir die bekannte Gleichung für das Linienelement in elliptischen Coordinaten:

$$ds^2 = \frac{\mu-\lambda}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)} - \frac{d\mu^2}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)}\right)$$

in parabolische Coordinaten mittels (2) übertragen. Dies giebt:

$$ds^2 = \frac{\omega(\mu-\lambda)}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\omega-\lambda)} - \frac{d\mu^2}{(\alpha-\mu)(\omega-\mu)}\right)$$

$$= \frac{\mu-\lambda}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)\left(1-\frac{\lambda}{\omega}\right)} - \frac{d\mu^2}{(\alpha-\mu)\left(1-\frac{\mu}{\omega}\right)}\right).$$

Für $\omega = \infty$ kommt wie in § 1:

$$ds^2 = \frac{\mu-\lambda}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{\alpha-\lambda} - \frac{d\mu^2}{\alpha-\mu}\right).$$

§ 4.

Eigenschaften eines Systems confocaler Paraboloide. Einführung parabolischer Coordinaten.

In rechtwinkeligen Coordinaten x y z stellt sich ein System confocaler Paraboloide bekanntlich dar durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{\beta-t} + \frac{z^2}{\gamma-t} + 2x + t = 0. \tag{1}$$

Hierin ist t ein Parameter, der zwischen den Grenzen $+\infty > t > -\infty$ eingeschlossen ist, und β und γ zwei Constante, die wir positiv, und von denen wir $\beta > \gamma$ annehmen wollen. Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$\varphi(t) = (\gamma-t)y^2 + (\beta-t)z^2 + 2(\gamma-t)(\beta-t)x + (\gamma-t)(\beta-t)t = 0, \tag{2}$$

so sehen wir, dass

$$\varphi(+\infty) = +\infty, \quad \varphi(\beta) = (\gamma-\beta)y^2 < 0,$$
$$\varphi(\gamma) = (\beta-\gamma)z^2 > 0, \quad \varphi(-\infty) = -\infty$$

ist. Die Gleichung hat also stets drei reelle Wurzeln, die wir mit λ, μ, ν bezeichnen wollen, und welche in den folgenden Grenzen eingeschlossen sind:

$$-\infty \leqq \lambda \leqq \gamma \leqq \mu \leqq \beta \leqq \nu \leqq +\infty. \qquad (3)$$

Es gehen daher durch jeden Punkt des Raumes drei Flächen des Systems, deren drei Parameter $\lambda\,\mu\,\nu$ die parabolischen Coordinaten des Punktes heissen. Die Gleichungen der drei Flächen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \text{a:}\quad & \frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda=0,\\ \text{b:}\quad & \frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu=0,\\ \text{c:}\quad & \frac{y^2}{\beta-\nu}+\frac{z^2}{\gamma-\nu}+2x+\nu=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Nehmen wir die positive x-Achse horizontal nach rechts, die positive y-Achse horizontal nach vorne, die positive z-Achse vertical nach oben an, so stellt die Gleichung a ein nach links offenes elliptisches, b ein hyperbolisches und c ein nach rechts offenes elliptisches Paraboloid dar.

Die Scheitelpunkte liegen auf der x-Achse, und ist der des Paraboloids a: $x=-\frac{\lambda}{2}$, der von b: $x=-\frac{\mu}{2}$ und der von c: $=-\frac{\nu}{2}$. Die Gleichung der Schnittcurven des Systems (vgl. Fig. II) mit der Coordinatenebene $y=0$ ist:

$$\frac{z^2}{\gamma-t}+2x+t=0.$$

Dies sind für $t=\lambda$ nach links offene, für $t=\mu$ und $t=\nu$ nach rechts offene Parabeln. Die Scheitelpunkte laufen auf der x-Achse respective von

$+\infty$ bis $-\frac{\gamma}{2}$, von $-\frac{\gamma}{2}$ bis $-\frac{\beta}{2}$, von $-\frac{\beta}{2}$ bis $-\infty$.

Die Gleichung der Schnittcurven des Systems mit der Coordinatenebene $z = 0$ ist:

$$\frac{y^2}{\beta - t} + 2x + t = 0.$$

Dies sind für $t = \lambda$ und $t = \mu$ links offene, für $t = \nu$ rechts offene Parabeln. Die Scheitelpunkte durchlaufen dieselben Werte. Figur II ist das Bild dieser Schnittcurven, wenn wir die Schnitte mit $t = \lambda$ durch schwarze, die mit $t = \mu$ durch strichpunktirte (—.—.—.) und die mit $t = \nu$ durch punktirte (.....) Curven darstellen. Die Gleichung des $t = \gamma$ entsprechenden Paraboloides ist:

$$z = 0, \quad \frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma = 0. \quad (F_1)$$

und die der $t = \beta$ entsprechenden Fläche:

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{\gamma - \beta} + 2x + \beta = 0. \quad (F_2)$$

F_1 und F_2 sind die Gleichungen der sogenannten Focalparabeln des gegebenen Systems. Es stellt nun das Innere von F_1 den Grenzfall $\lambda = \gamma$ des links offenen elliptischen, das Aeussere von F_1 den Fall $\mu = \gamma$ des hyperbolischen, das Aeussere von F_2 den Grenzfall $\mu = \beta$ des hyperbolischen und das Innere von F_2 den Fall $\nu = \beta$ des rechts offenen elliptischen Paraboloides dar.

Die parabolischen Coordinaten der Focalparabel F_1 sind daher $\begin{cases} \lambda = \mu = \gamma \\ \nu = \nu \end{cases}$ und die von F_2 $\begin{cases} \lambda = \lambda \\ \mu = \nu = \beta \end{cases}$

F_1 hat also dieselben Coordinaten wie die Focalellipse, F_2 dieselben wie die Focalhyperbel des Systems confocaler centrischer Flächen zweiten Grades.

Die Gleichungen (4) geben zu je zweien von einander subtrahiert:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda-\mu)\left(\frac{y^2}{(\beta-\lambda)\,(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)\,(\gamma-\mu)}+1\right)&=0\\(\mu-\nu)\left(\frac{y^2}{(\beta-\mu)\,(\beta-\nu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)\,(\gamma-\nu)}+1\right)&=0\\(\nu-\lambda)\left(\frac{y^2}{(\beta-\nu)\,(\beta-\lambda)}+\frac{z^2}{(\gamma-\nu)\,(\gamma-\lambda)}+1\right)&=0\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Diesen drei Gleichungen muss der Schnittpunkt der drei Flächen genügen. Für die drei Flächennormalen ξ, η, ζ erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (4) folgende Richtungscosinus:

	ξ	η	ζ
x	l	m	n
y	$l\frac{y}{\beta-\lambda}$	$m\frac{y}{\beta-\mu}$	$n\frac{y}{\beta-\nu}$
z	$l\frac{z}{\gamma-\lambda}$	$m\frac{z}{\gamma-\mu}$	$n\frac{z}{\gamma-\nu}$

(6)

Hierin berechnen sich l, m, n aus:

$$\frac{1}{l^2}=\frac{y^2}{(\beta-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2}+1$$
$$\frac{1}{m^2}=\frac{y^2}{(\beta-\mu)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)^2}+1$$
$$\frac{1}{n^2}=\frac{y^2}{(\beta-\nu)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\nu)^2}+1$$

Multiplizieren wir gliedweise je zwei verticale Reihen des Schemas (6), addieren die drei so entstehenden Glieder und setzen die Summe $=0$, so erhalten wir die Bedingungen für das Senkrechtstehen der drei Normalen aufeinander. Da die so entstehenden Gleichungen, wie man sieht, gemäss (5) für alle Punkte, ausgenommen die der Focalcurven $\lambda=\mu$ und $\mu=\nu$ stets erfüllt sind, so haben wir den auch für die centrischen Flächen geltenden Satz gefunden:

„Die drei Arten der Paraboloide eines confocalen Systems schneiden sich in jedem Punkte des Raumes, die der Focalcurven ausgenommen, orthogonal.“

Die Coordinatenebenen $y=0$ und $z=0$ gehören selbst zu den Flächen des Systems. Auf ihnen schneiden die beiden andern Flächenarten ein System confocaler Kegelschnitte aus, welche sich bekanntlich ebenfalls in jedem Punkte senkrecht schneiden.

§ 5.

Transformationsformeln zwischen den rechtwinkeligen und parabolischsn Coordinaten.

Bevor wir zu den weiteren Berechnungen schreiten, wollen wir zunächst die dazu erforderlichen Transformationsformeln und dabei gebrauchten Abkürzungen hier kurz zusammenstellen.

Man definiert die parabolischen Coordinaten des Punktes $x\,y\,z$ durch die in t identische Gleichung:

$$\text{(I)}\qquad \frac{y^2}{\beta-t}+\frac{z^2}{\gamma-t}+2x+t=\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(t-\beta)(t-\gamma)}.$$

Die durch den Punkt $\lambda\,\mu\,\nu$ gehenden Flächen sind:

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda=0,\\ \dfrac{y^2}{\beta-\mu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu=0,\\ \dfrac{y^2}{\beta-\nu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\nu}+2x+\nu=0, \end{cases}$$

unter Berücksichtigung der Ungleichheit:

$$\text{(III)}\qquad -\infty>\lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu>+\infty.$$

Aus II findet man als rechtwinkelige Coordinaten des Punktes $\lambda\,\mu\,\nu$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2}, \\ y^2 &= -\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{\beta-\gamma}, \quad z^2 = \frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{\gamma-\beta}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (II) von der Gleichung (I) ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-t)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-t)} &= \frac{(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-t)}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-t)} &= \frac{(t-\nu)(t-\lambda)}{(\beta-t)(\gamma-t)}, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\nu)(\beta-t)}+\frac{z^2}{(\gamma-\nu)(\gamma-t)} &= \frac{(t-\lambda)(t-\mu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

Hierin t respective $=\lambda, \mu, \nu$ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2} &= \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} = 4L, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\mu)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)^2} &= \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} = 4M, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\nu)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\nu)^2} &= \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)} = 4N, \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

worin L, M, N als Abkürzungen eingeführt sind. Setzen wir in (V) t respective $=\mu, \nu, \lambda$, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen dafür, dass die drei Flächen sich rechtwinkelig schneiden:

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)} &= 0, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} &= 0, \\ 1+\frac{y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)}+\frac{z^2}{(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

Aus je zwei Gleichungen (V) erhält man durch Subtraktion:

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-t)} = \dfrac{t-\lambda}{(\beta-t)(\gamma-t)}, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)(\gamma-t)} = \dfrac{t-\mu}{(\beta-t)(\gamma-t)}, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-t)} = \dfrac{t-\nu}{(\beta-t)(\gamma-t)}. \end{cases}$$

Subtrahieren wir entsprechend die Gleichungen (VI) von (V), so kommt:

$$(\text{XI})\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)^2(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2(\gamma-t)} = \dfrac{1}{t-\lambda}\left(\dfrac{(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)} - \dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\right), \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)^2(\gamma-t)} = \dfrac{1}{t-\mu}\left(\dfrac{(t-\nu)(t-\lambda)}{(\beta-t)(\gamma-t)} - \dfrac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\right), \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\nu)^2(\beta-t)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)^2(\gamma-t)} = \dfrac{1}{t-\nu}\left(\dfrac{(t-\lambda)(t-\mu)}{(\beta-t)(\gamma-t)} - \dfrac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\right). \end{cases}$$

Es seien hier noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\Lambda_{t_1 t_2} = \sqrt{[(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)]} = \Lambda_{1,2},$$
$$M_{t_1 t_2} = \sqrt{[(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(t_1-\mu)(t_2-\mu)]} = M_{1,2},$$
$$N_{t_1 t_2} = \sqrt{[(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-t_1)(\nu-t_2)]} = N_{1,2}.$$

$$\mathfrak{L}_{t_1 t_2} = \frac{2\Lambda_{1,2}}{(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)} = \mathfrak{L}_{1,2},$$

$$\mathfrak{M}_{t_1 t_2} = \frac{2M_{1,2}}{(\mu-t_1)(t_2-\mu)} = \mathfrak{M}_{1,2},$$

$$\mathfrak{N}_{t_1 t_2} = \frac{2N_{1,2}}{(\nu-t_1)(\nu-t_2)} = \mathfrak{N}_{1,2}.$$

In dem speciellen Fall $t_1 = \lambda_0$, $t_2 = \mu_0$ wollen wir später einfach Λ, M, N, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ohne Indices gebrauchen.

§ 6.

Ueberführung des Systems der confocalen centrischen Flächen in das der confocalen Paraboloide.

Da die Eigenschaften und Gleichungen eines Systems confocaler centrischer Flächen zweiten Grades schon weit mehr untersucht sind als die des Systems confocaler Paraboloide, so ist es von Bedeutung, eine Transformationsformel zu finden, mittels derer man die Gleichungen des ersteren Systems in die des letzteren übertragen kann. Das System der centrischen Flächen sei gegeben durch:

$$\frac{x'^2}{\alpha'-t'}+\frac{y'^2}{\beta'-t'}+\frac{z'^2}{\gamma'-t'}=1,$$

wo $\alpha'>\beta'>\gamma'$ ist. Verlegen wir den Coordinatenanfangspunkt durch die Transformation

$$x'=x+\sqrt{\alpha'},\quad y'=y,\quad z'=z \qquad (1)$$

in den einen Scheitelpunkt der Fläche $t=0$, so nimmt die Gleichung die Form

$$\frac{x^2+2x\sqrt{\alpha'}+\alpha'}{\alpha'-t'}+\frac{y^2}{\beta'-t'}+\frac{z^2}{\gamma'-t'}=1$$

an. Jetzt lassen wir die drei Achsen unendlich gross werden, doch so, dass das Verhältniss der zweiten zur dritten endlich bleibt, was wir durch folgende Transformation bewirken:

$$\alpha'=\omega^2,\quad \beta'=\beta\omega,\quad \gamma'=\gamma\omega,\quad t'=t\omega, \qquad (2)$$

worin wir ω unendlich gross werden lassen wollen. Die Gleichung des Systems nimmt dadurch die Form an:

$$\frac{y^2}{\beta-t}+\frac{z^2}{\gamma-t}+\frac{\omega t}{\omega-t}+\frac{x^2}{\omega-t}+\frac{2x\omega}{\omega-t}=0.$$

Setzt man $\omega = \infty$, so wird

$$\frac{\omega t}{\omega - t} = \frac{t}{1 - \frac{t}{\omega}} = t, \qquad \frac{x^2}{\omega - t} = 0, \qquad \frac{2x\omega}{\omega - t} = 2x$$

und die betrachtete Gleichung nimmt die Gestalt derjenigen des Systems confocaler Paraboloide an:

$$\frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} + 2x + t = 0.$$

Mit Hülfe dieser Transformation lassen sich nun auch alle andern für die centrischen Flächen gültigen Gleichungen auf die Paraboloide übertragen. So erhält man z. B. die zweite der Gleichungen (IV) direkt aus der entsprechenden für elliptische Coordinaten:

$$y'^2 = \frac{(\beta' - \lambda')\,(\beta' - \mu')\,(\beta' - \nu')}{(\beta' - \alpha')\,(\beta' - \gamma')}.$$

Mittels der Transformationen (1) und (2) wird:

$$y^2 = \lim_{\omega = \infty} \frac{\omega^3 (\beta - \lambda)\,(\beta - \mu)\,(\beta - \nu)}{\omega^3 \left(\frac{\beta}{\omega} - 1\right)(\beta - \gamma)} = \frac{(\beta - \lambda)\,(\beta - \mu)\,(\beta - \nu)}{-(\beta - \gamma)}.$$

Oft lässt sich jedoch die Transformation nur mittels Reihenentwickelungen ausführen. Als Beispiel hierfür wollen wir die erste der Gleichungen (IV) aus der entsprechenden der centrischen Flächen ableiten. Diese lautet:

$$x'^2 = \frac{(\alpha' - \lambda')\,(\alpha' - \mu')\,(\alpha' - \nu')}{(\alpha' - \beta')\,(\alpha' - \gamma')}.$$

Durch unsere Transformation erhalten wir:

$$(x + \omega)^2 = \frac{(\omega^2 - \omega\lambda)\,(\omega^2 - \omega\mu)\,(\omega^2 - \omega\nu)}{(\omega^2 - \omega\beta)\,(\omega^2 - \omega\gamma)}$$

$$\omega^2 \frac{\omega^3 - \omega^2(\lambda + \mu + \nu) + \omega(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) - \lambda\mu\nu}{\omega(\omega - \gamma)\,(\omega - \beta)},$$

$$x + \omega = \omega \sqrt{\left(1 + \frac{(\gamma + \beta - \lambda - \mu - \nu)\,\omega^2 + (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda - \gamma\beta)\,\omega - \lambda\mu\nu}{\omega(\omega - \gamma)\,(\omega - \beta)}\right)}.$$

Da das zweite Glied unter der Wurzel für sehr grosses ω ein echter Bruch wird, so kann man sie in eine Reihe entwickeln und erhält:

$$x = \omega\left(\frac{1}{2} + \frac{(\gamma+\beta-\lambda-\mu-\nu)\omega^2 + (\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda-\gamma\beta)\omega - \lambda\mu\nu}{\omega(\omega-\gamma)(\omega-\beta)} + \cdots\right).$$

Setzt man nun $\omega = \infty$, so werden alle Glieder mit alleiniger Ausnahme des ersten $= 0$ und es wird also, wie wir in IV schon hatten:

$$x = \frac{1}{2}(\gamma+\beta-\lambda-\mu-\nu).$$

Ueber die Werte von λ, μ, ν im Unendlichen.

Wie aus der obigen Transformation des Systems der centrischen Flächen in das der Paraboloide sich ergiebt, können wir letzteres als ein System centrischer Flächen auffassen, welches so gelegen ist, dass die rechten Brenn- und Scheitelpunkte im Endlichen, das gemeinsame Centrum, die linken Brenn- und Scheitelpunkte dagegen im Unendlichen liegen, was durch die Figur IIa der Focalcurven angedeutet sein mag. Da die elliptischen Coordinaten für zwei zur Ebene $\nu = \alpha$ symmetrisch gelegene Punkte dieselben sind, so muss dies auch nach der obigen Auffassung der Paraboloide für diese in Bezug auf die Ebene $\nu = \infty$ gelten. Die parabolischen Coordinaten des unendlich weit entfernten Scheitelpunktes der früheren Focalellipse F_1 sind daher: $\lambda = \gamma$, $\pi = \gamma$, $\nu = \beta$ (also gleich den elliptischen, wie in § 2 gezeigt worden ist). Die parabolischen Coordinaten des unendlich entfernten Scheitelpunktes der früheren Focalhyperbel sind $\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ und die des Centrums $\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \infty$. Auch wird für die ganze, unendlich ferne, durch letzteres senkrecht zur Hauptachse gelegte Ebene $\nu = \infty$ sein.

Ohne Berücksichtigung obiger Transformation würde man den unendlich entfernten Mittelpunkt nicht von dem

ebenfalls dort gelegenen Brenn- noch Scheitelpunkt unterscheiden können; auch würde man diesem unendlich fernen Punkt der X-Achse keine bestimmte parabolische Coordinaten beilegen können, da alle Paraboloide als durch diesen Punkt hindurchgehend zu betrachten wären.

§ 7.

Quadrat und Richtung des Linienelements.

Durch logarithmische Differentiation der Gleichungen (IV) erhält man:

$$(1)\quad \begin{cases} dx = -\dfrac{d\lambda + d\mu + d\nu}{2}, \\ dy = -\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{d\lambda}{\beta-\lambda} + \dfrac{d\mu}{\beta-\mu} + \dfrac{d\nu}{\beta-\nu}\right), \\ dz = -\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{d\lambda}{\gamma-\lambda} + \dfrac{d\mu}{\gamma-\mu} + \dfrac{d\nu}{\gamma-\nu}\right). \end{cases}$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen bekommt man mit Benutzung der Formeln (VI) und (VII):

$$(2)\quad \underline{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = L d\lambda^2 + M d\mu^2 + N d\nu^2}.$$

Bezeichnen wir durch die unteren Indices 1, 2, 3 beziehungsweise die partielle Differentiation nach λ, μ, ν, so ist:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}, & x_2 = -\dfrac{1}{2}, & x_3 = -\dfrac{1}{2}, \\ y_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{y}{\beta-\lambda}, & y_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{y}{\beta-\mu}, & y_3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{y}{\beta-\nu}, \\ z_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{\gamma-\lambda}, & z_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{\gamma-\mu}, & z_3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{\gamma-\nu}. \end{cases}$$

Die Richtungscosinus der vom Punkte $x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ausgehenden Elemente ds_λ, ds_μ, ds_ν der λ-Linie $[x = x(\lambda), y = y(\lambda) z = z(\lambda)]$, μ-Linie und ν-Linie (im Sinne des wachsenden λ, μ, ν) gegen die Achsen x, y, z sind daher:

	x	y	z
ds_λ (ξ)	lx_1	ly_1	lz_1
ds_μ (η)	mx_1	my_1	mz_1
ds_ν (ζ)	nx_1	ny_1	nz_1,

(4)

wo

$$l = \frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}} \text{ und nach (VI)}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{5}$$

ist. Da die Flächen sich orthogonal schneiden, so sind (4) zugleich die Richtungscosinus der im Sinne der wachsenden λ, μ, ν verfolgten Normalen ξ, η, ζ der Flächen λ, μ, ν (vgl. Fig. III). Die Richtungscosinus eines beliebigen Elementes $ds = d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ gegen die Achsen x, y, z sind.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{x_1 d\lambda + x_2 d\mu + x_3 d\nu}{ds}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{y_1 d\lambda + y_2 d\mu + y_3 d\nu}{ds}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{z_1 d\lambda + z_2 d\mu + z_3 d\nu}{ds}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und gegen die Achsen $\xi\,\eta\,\zeta$ erhalten wir sie durch Multiplication mit den entsprechenden Werten von (5) und Addition. Also sind dieselben:

$$\frac{x_1 d\lambda + x_2 d\mu + x_3 d\nu}{ds}\,\frac{x_1}{\sqrt{L}} + \frac{y_1 d\lambda + y_2 d\mu + y_3 d\nu}{ds}\,\frac{y_1}{\sqrt{L}} + \frac{z_1 d\lambda + z_2 d\mu + z_3 d\nu}{ds}\,\frac{z_1}{\sqrt{L}},$$

$$\frac{x_1 d\lambda + x_2 d\mu + x_3 d\nu}{ds}\,\frac{x_2}{\sqrt{M}} + \frac{y_1 d\lambda + y_2 d\mu + y_3 d\nu}{ds}\,\frac{y_2}{\sqrt{M}} + \frac{z_1 d\lambda + z_2 d\mu + z_3 d\nu}{ds}\,\frac{z_2}{\sqrt{M}},$$

$$\frac{x_1 d\lambda + x_2 d\mu + x_3 d\nu}{ds}\frac{x_3}{\sqrt{N}} + \frac{y_1 d\lambda + y_2 d\mu + y_3 d\mu}{ds}\frac{y_3}{\sqrt{N}} + \frac{z_1 d\lambda + z_2 d\mu + z_3 d\nu}{ds}\frac{z_3}{\sqrt{N}}.$$

Für den ersten Richtungscosinus können wir schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\left(\frac{d\lambda}{ds}(x_1^2 + y_1^2 z + {}_1^2) + \frac{d\mu}{ds}(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \frac{d\nu}{ds}(x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3)\right),$$

was nach VI und VII $= \sqrt{L}\frac{d\lambda}{ds}$ ist. So erhalten wir als Richtungscosinus von ds gegen ξ, η, ζ:

$$\sqrt{L}\cdot\frac{d\lambda}{ds}, \quad \sqrt{M}\cdot\frac{d\mu}{ds}, \quad \sqrt{N}\cdot\frac{d\nu}{ds}.$$

Die Parallelcoordinaten des Linienelementes λ, μ, ν, $d\lambda, d\mu, d\nu$ gegen die Achsen ξ, η, ζ sind daher:

(7) $ds_\lambda = \sqrt{L}\cdot d\lambda, \quad ds_\mu = \sqrt{M}\cdot d\mu, \quad ds_\nu = \sqrt{N}\cdot d\nu.$

§ 8.

Differentialgleichung der zweien Flächen des Systems gemeinsamen Tangenten.

Die Differentialgleichung des Berührungskegels an eine Fläche zweiten Grades:

$$g(X, Y, Z) = a_{11}X^2 + \cdots + 2a_{23}YZ + \cdots + 2a_{14}X + \cdots + a_{44} = 0$$

vom Punkte x y z ist:

$$g(xyz)[a_{11}(X-x)^2 + \cdots + 2a_{23}(Y-y)(Z-z) + \cdots] - [(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})(X-x) + \cdots]^2 = 0.$$

Für das Paraboloid:

$$g = \frac{Y^2}{\beta - t} + \frac{Z^2}{\gamma - t} + 2X + t = 0$$

nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{y^2}{\beta-t}+\frac{z^2}{\gamma-t}+2x+t\right)\left[\frac{(Y-y)^2}{\beta-t}+\frac{(Z-z)^2}{\gamma-t}\right] - \left[(X-x)+\frac{y(Y-y)}{\beta-t}+\frac{z(Z-z)}{\gamma-t}\right]^2=0. \tag{1}$$

Sind $\xi\eta\zeta$ wieder die durch den Punkt xyz gehenden Normalen, so ist nach § 7, 4:

$$X-x=-\frac{x_1}{\sqrt{L}}\xi+\frac{x_2}{\sqrt{M}}\eta+\frac{x_3}{\sqrt{N}}\zeta,$$

$$Y-y=-\frac{y_1}{\sqrt{L}}\xi+\frac{y_2}{\sqrt{M}}\eta+\frac{y_3}{\sqrt{N}}\zeta,$$

$$Z-z=\frac{z_1}{\sqrt{L}}\xi+\frac{z_2}{\sqrt{M}}\eta+\frac{z_3}{\sqrt{N}}\zeta.$$

Danach wird:

$$\frac{(Y-y)^2}{\beta-t}+\frac{(Z-z)^2}{\gamma-t}=$$

$$\left(\frac{y_1^2}{\beta-t}+\frac{z_1^2}{\gamma-t}\right)\frac{\xi^2}{L}+\cdot+\cdot+2\left(\frac{y_2y_3}{\beta-t}+\frac{z_2z_3}{\gamma-t}\right)\frac{\eta\zeta}{\sqrt{M}\sqrt{N}}+\cdot+\cdot.$$

Setzt man die Werte (3) § 7 hierin ein und berücksichtigt VIII und IX, so findet man:

$$\frac{(Y-y)^2}{\beta-t}+\frac{(Z-z)^2}{\gamma-t}=\frac{1}{4}\frac{1}{t-\lambda}\left(\frac{(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}-\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\right)\frac{\xi^2}{L}$$

$$+\cdot+\cdot+\frac{1}{4}\frac{t-\lambda}{(\beta-t)(\gamma-t)}\frac{2\eta\zeta}{\sqrt{M}\sqrt{N}}+\cdot+\cdot$$

$$=\frac{1}{4}\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}\left(\frac{\xi}{(t-\lambda)\sqrt{L}}+\frac{\eta}{(t-\mu)\sqrt{M}}+\frac{\zeta}{(t-\nu)\sqrt{N}}\right)^2 \tag{2}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t-\lambda)}\frac{\xi^2}{L}-\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(t-\mu)}\frac{\eta^2}{M}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(t-\nu)}\frac{\zeta^2}{N}.$$

Ferner wird:

$$(X-x)+(Y-y)\frac{y}{\beta-t}+(Z-z)\frac{z}{\gamma-t}=-\left(\frac{y\,y_1}{\beta-t}+\frac{z\,z_1}{\gamma-t}+x_1\right)\cdot\frac{\xi}{\sqrt{L}}+\cdot+\cdot \qquad \text{nach (V)}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}\,\frac{\xi}{\sqrt{L}}+\cdot+\cdot$$

oder:

$$(X-x)+\frac{(Y-y)\,y}{\beta-t}+\frac{(Z-z)\,z}{\gamma-t}=-\frac{1}{2}\,\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}$$

$$\cdot\left(\frac{\xi}{(t-\lambda)\sqrt{L}}+\frac{\eta}{(t-\mu)\sqrt{M}}+\frac{\zeta}{(t-\nu)\sqrt{N}}\right). \tag{3}$$

Nach Formel (I) ist

$$\frac{y^2}{\beta-t}+\frac{z^2}{\gamma-t}+2x+t=\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(\beta-t)(\gamma-t)}. \tag{4}$$

Setzen wir für die linken Seiten der Gleichungen (2), (3), (4) ihre durch diese ausgedrückten Werte in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir als Gleichung des Berührungskegels an die Fläche t in laufenden Coordinaten ξ, η, ζ:

$$\frac{1}{4}\,\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t-\lambda)}\,\frac{\xi^2}{L}+\frac{1}{4}\,\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(t-\mu)}\,\frac{\eta^2}{M}$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(t-\nu)}\,\frac{\zeta^2}{N}=0 \tag{5}$$

oder:

$$\frac{\xi^2}{t-\lambda}+\frac{\eta^2}{t-\mu}+\frac{\zeta^2}{t-\nu}=0. \tag{6}$$

Nehmen wir jetzt die Werte von $\xi\,\eta\,\zeta$ sehr klein, so ist:

$$\xi=ds_\lambda, \qquad \eta=ds_\mu, \qquad \zeta=ds_\nu,$$

und nach (6) § 7 ist

$$ds_\lambda=\sqrt{L}\cdot d\lambda, \qquad ds_\mu=\sqrt{M}\cdot d\mu, \qquad ds_\nu=\sqrt{N}\cdot d\nu,$$

durch welche Substitutionen die Gleichung (5) in die Differentialgleichung des Berührungskegels an die Fläche t in parabolischen Coordinaten übergeht:

$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t-\lambda)}\,d\lambda^2+\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(t-\mu)}\,d\mu^2$$
$$+\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(t-\nu)}\,d\nu^2=0.$$

Die Kombination der Gleichungen der beiden an t_1 und t_2 gezogenen Kegel:

$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\,d\lambda^2}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t_1-\lambda)}+\cdot+\cdot=0,$$
$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\,d\lambda^2}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(t_2-\lambda)}+\cdot+\cdot=0$$

ergiebt die Bedingungsgleichungen für die t_1 nnd t_2 gemeinsamen Tangenten.

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen je einmal $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, so finden wir:

$$\frac{(\lambda-\mu)^2}{M_{1,2}^{\,2}}\,d\mu^2=\frac{(\lambda-\nu)^2}{N_{1,2}^{\,2}}\,d\nu^2;\quad \frac{(\mu-\nu)^2}{N_{1,2}^{\,2}}\,d\nu^2=\frac{(\mu-\lambda)^2}{A_{1,2}^{\,2}}\,d\lambda^2;$$
$$\frac{(\nu-\lambda)^2}{A_{1,2}^{\,2}}\,d\lambda^2=\frac{(\nu-\mu)^2}{M_{1,2}^{\,2}}\,d\mu^2.$$

Durch Wurzelziehen ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mu-\lambda}{A_{1,2}}\,d\lambda-\dfrac{\nu-\mu}{N_{1,2}}\,d\lambda=0;\quad \dfrac{\mu-\lambda}{M_{1,2}}\,d\mu-\dfrac{\nu-\lambda}{N_{1,2}}\,d\nu=0;\\ \dfrac{\nu-\lambda}{A_{1,2}}\,d\lambda-\dfrac{\nu-\mu}{M_{1,2}}\,d\mu=0,\end{array}\right\}\qquad(7)$$

worin wir A, M, N respective die Vorzeichen von $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ geben, um die Gleichungen reell zu machen. Leichte Combinationen dieser Gleichungen sind:

$$\frac{d\lambda}{A_{1,2}}-\frac{d\mu}{M_{1,2}}+\frac{d\nu}{N_{1,2}}=0,$$
$$\lambda\frac{d\lambda}{A_{1,2}}-\frac{d\mu}{M_{1,2}}+\frac{d\nu}{N_{1,2}}=0.$$

§ 9.

Realität und Linienelement der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen des Systems.

Die gemeinsamen Tangenten vom Punkte λ, μ, ν an die beiden Flächen t_1 und t_2 des Systems sind die Schnittlinien der beiden von jenem Punkte an diese Flächen gelegten Kegel, deren Gleichungen nach § 8, 6 lauten:

$$\frac{\xi^2}{t_1-\lambda}+\frac{\eta^2}{t_1-\mu}+\frac{\zeta^2}{t_1-\nu}=0,$$

$$\frac{\xi^2}{t_2-\lambda}+\frac{\eta^2}{t_2-\mu}+\frac{\zeta^2}{t_2-\nu}=0.$$

Daraus ergiebt sich als Bedingungsgleichung für die laufenden Coordinaten der gemeinsamen Tangenten:

$$(1)\quad \xi^2:\eta^2:\zeta^2=\frac{(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}:\frac{(t_1-\mu)(t_2-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}:\frac{(t_1-\nu)(t_2-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}$$

oder:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\xi^2&=\frac{(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\sigma^2,\\ \eta^2&=\frac{(t_1-\mu)(t_2-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}\sigma^2,\\ \zeta^2&=\frac{(t_1-\nu)(t_2-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\sigma^2,\end{aligned}\right.$$

wo $\sigma^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ ist, da

$$(3)\quad \frac{(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}+\frac{(t_1-\mu)(t_2-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}+\frac{(t_1-\nu)(t_2-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}=1.$$

Sollen die Tangenten reell, d. h. ξ^2, η^2, ζ^2 positiv sein, so müssen, da $\lambda<\mu<\nu$ ist, folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$\text{a}:\ (t_1-\lambda)(t_2-\lambda)>0,$$

$$\text{b}:\ (t_1-\mu)(t_2-\mu)<0,$$

$$\text{c}:\ (t_1-\nu)(t_2-\nu)>0.$$

Nach (b) muss ein t, etwa $t_2>\mu$, das andere $t_1<\mu$ sein. Demgemäss folgt aus (a): $t_1>\lambda$ und aus (c) $t_2<\nu$.

Die Realität der Tangenten knüpft sich daher an folgende Ungleichheit für t_1 und t_2:

$$\lambda < t_1 < \mu < t_2 < \nu. \qquad (4)$$

Die beiden Flächen t können daher nur nachstehende, durch die unteren Indices 0 bezeichnete Werthe haben:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda < \lambda_0 < \mu < \mu_0 < \nu, \text{ links offene elliptische und hyperb.,} \\ \lambda < \lambda_0 < \mu < \nu_0 < \nu, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{und rechts offene ellipt.,} \\ \gamma < \mu_0 < \mu < \mu_{00} < \nu, \text{ zwei hyperbolische,} \\ \lambda < \mu_0 < \mu < \nu_0 < \nu, \text{ hyperb. und rechts offene elliptische} \\ \quad \text{Paraboloide.} \end{array}\right\} (5)$$

Das Linienelement der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen.

Es ist nach § 7, 2 in parabolischen Coordinaten das Linienelement:

$$ds^2 = L d\lambda^2 + M d\mu^2 + N d\nu^2,$$

was wir nach (VI) und (X) auch schreiben können

$$\begin{aligned} ds^2 = &\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)}{A_{1,2}^{\,2}} d\lambda^2 \\ &+\frac{1}{4}\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)(t_1-\mu)(t_2-\mu)}{M_{1,2}^{\,2}} d\mu^2 \\ &+\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(t_1-\nu)(t_2-\nu)}{N_{1,2}} d\nu^2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Mittels der Bedingungsgleichungen für die gemeinsamen Tangenten (§ 8, 7) lassen sich nun $d\mu^2$ und $d\nu^2$ durch $d\lambda^2$ ausdrücken, und geben diese Werte in (6) eingesetzt:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(t_1-\lambda)(t_2-\lambda)}{A_{1,2}^{\,2}} d\lambda^2 \\ &+\frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{\nu-\mu}(t_1-\mu)(t_2-\mu)(\nu-\lambda)^2\frac{d\lambda^2}{A_{1,2}^{\,2}} \\ &+\frac{1}{4}\frac{\lambda-\nu}{(\mu-\nu)}(t_1-\nu)(t_2-\nu)(\mu-\lambda)^2\frac{d\lambda^2}{A_{1,2}^{\,2}}, \end{aligned}$$

oder:

$$ds^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\nu-\lambda)\,(\lambda-\mu)}{\mu-\nu}\,\frac{d\lambda^2}{A_{1,2}{}^2}\cdot$$

$$(7)\qquad \begin{aligned}&[(\mu-\nu)\,(t_1-\lambda)\,(t_2-\lambda)+(\nu-\lambda)\,(t_1-\mu)\,(t_2-\mu)+(\lambda-\mu)\,(t_1-\nu)\,(t_2-\nu)]\\ &=\frac{1}{4}\,\frac{(\nu-\lambda)\,(\lambda-\mu)}{\mu-\nu}\,\frac{d\lambda^2}{A_{1,2}{}^2}\,[-(\mu-\nu)\,(\nu-\lambda)\,(\lambda-\mu)]\end{aligned}$$

nach der allgemein gültigen Formel:

$$(8)\qquad \begin{aligned}&(y-z)\,(a-x)\,(b-x)+(z-x)\,(a-y)\,(b-y)+(x-y)\,(a-z)\,(b-z)\\ &=-(x-y)\,(y-z)\,(z-x).\end{aligned}$$

Weil ds positiv sein muss erhält man aus (7), wenn wie immer $\frac{d\lambda}{A_{1,2}} > 0$ gesetzt wird:

$$ds = -\frac{1}{2}\,\frac{(\nu-\lambda)\,(\lambda-\mu)}{A_{1,2}}\,d\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{d\lambda}{(\mu-\nu)\,A_{1,2}}\,[-(\mu-\nu)\cdot(\nu-\lambda)\,(\lambda-\mu)].$$

Benutzen wir nun (8) wieder, so können wir ds auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}ds &= \frac{1}{2}\,\frac{(t_1-\lambda)\,(t_2-\lambda)}{A_{1,2}}\,d\lambda\\ &+\frac{1}{2}\,\frac{(\nu-\lambda)\,(t_1-\mu)\,(t_2-\mu)}{(\mu-\nu)\,A_{1,2}}\,d\lambda+\frac{1}{2}\,\frac{(\lambda-\mu)\,(t_1-\nu)\,(t_2-\nu)}{(\mu-\nu)\,A_{1,2}}\,d\lambda\end{aligned}$$

und erhalten mittels 7 § 8 als separierte Form des Linienelements der gemeinsamen Tangenten:

$$(9)\qquad \begin{aligned}ds &= \frac{1}{2}\,\frac{(t_1-\lambda)\,(t_2-\lambda)}{A_{1,2}}\,d\lambda\\ &-\frac{1}{2}\,\frac{(t_1-\mu)\,(t_2-\mu)}{M_{1,2}}\,d\mu+\frac{1}{2}\,\frac{(t_1-\nu)\,(t_2-\nu)}{N_{1,2}}\,d\nu\end{aligned}$$

wo A, M, N immer dieselben Vorzeichen wie $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ haben müssen.

§ 10.

Differentialgleichung und Linienelement der geodätischen Linien eines Paraboloides.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien einer Fläche $f = 0$ ist (nach Hesses „Analytisch Geometrie", Vorlesung 23, Formel 11):

$$\begin{aligned}(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)\ (f_1' dx + f_2' dy + f_3' dz) \\ + c\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

wo c eine Constante und

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x},\quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y},\quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z},\quad f_1' = df_1,\quad f_2' = df_2,\quad f_3' = df_3$$

ist. Für ein beliebiges Paraboloid λ unseres Systems ist

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + 2x + \lambda\right) = 0.$$

Die Gleichung (1) nimmt daher für diese Fläche folgende Form an:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y^2}{(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2} + 1\right)\left(\frac{dy^2}{\beta-\lambda} + \frac{dz^2}{\gamma-\lambda}\right) \\ + c(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Nach VI ist nun

$$\frac{y^2}{(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2} + 1 = 4L. \tag{3}$$

Ferner

$$\begin{aligned}\frac{dy^2}{\beta-\lambda} + \frac{dz^2}{\gamma-\lambda} = \frac{1}{4}\frac{y^2}{(\beta-\lambda)}\left(\frac{d\lambda}{\beta-\lambda} + \frac{d\mu}{\beta-\mu} + \frac{d\nu}{\beta-\nu}\right)^2 \\ + \frac{1}{4}\frac{z^2}{\gamma-\lambda}\left(\frac{d\lambda}{\gamma-\lambda} + \frac{d\mu}{\gamma-\mu} + \frac{d\nu}{\gamma-\nu}\right)^2\end{aligned}$$

nach § 7, 1. Da die geodätischen Linien auf $\lambda = \text{const.}$ verlaufen, ist $d\lambda = 0$. Daraus folgt mit Hülfe von (IX), worin wir $t = \lambda$ zu setzen haben:

$$\frac{dy^2}{\beta-\lambda}+\frac{dz^2}{\gamma-\lambda}=-\frac{1}{4}\left(\frac{d\mu^2}{\lambda-\mu}\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}+\frac{d\nu^2}{\lambda-\nu}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\right)$$

$$(4)\qquad =M\frac{d\mu^2}{\lambda-\mu}-N\frac{d\nu^2}{\lambda-\nu}.$$

Ferner ist nach § 7, 2 ($d\lambda=0$ gesetzt):

$$(5)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=M\,d\mu^2+N\,d\nu^2.$$

Setzen wir für die linken Seiten der Gleichungen (3), (4), (5) die rechten Seiten in die Gleichung (2) ein, so ergiebt sich:

$$-4L\left(\frac{M}{\lambda-\mu}d\mu^2+\frac{N}{\lambda-\nu}d\nu^2\right)=c(M\,d\mu^2+N\,d\nu^2),$$

$$4M\left(c-\frac{4L}{\lambda-\mu}\right)d\mu^2+4N\left(c-\frac{4L}{\lambda-\nu}\right)d\nu^2=0,$$

$$4M\left(\frac{c(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)-(\lambda-\nu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\right)d\mu^2+4N\left(\frac{c(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)-(\lambda-\mu)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\right)d\nu^2=0.$$

Wenn wir die constante Grösse:

$$\lambda-c(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)=\alpha$$

setzen, ergiebt sich:

$$-\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)(\nu-\alpha)}{(\mu-\beta)(\mu-\gamma)}d\mu^2+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\mu-\alpha)}{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)}d\nu^2=0.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf λ_0 lautet daher:

$$\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu^2}{(\mu-\beta)(\mu-\gamma)(\mu-\alpha)}-\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu^2}{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)}$$

oder:

$$(6)\qquad \underline{\frac{\mu-\lambda_0}{M_{\lambda_0\alpha}}d\mu-\frac{\nu-\lambda_0}{N_{\lambda_0\alpha}}d\nu=0.}$$

Die entsprechenden Gleichungen für μ_0 und ν_0 werden:

$$(7)\qquad \underline{\frac{\nu-\mu_0}{N_{\mu_0\alpha}}d\nu-\frac{\lambda-\mu_0}{M_{\mu_0\alpha}}d\lambda=0;}\quad \underline{\frac{\lambda-\nu_0}{M_{\nu_0\alpha}}d\lambda-\frac{\mu-\nu_0}{M_{\nu_0\alpha}}d\mu=0.}$$

Für reelle geodätische Linien sind wieder

$$\frac{d\lambda}{L},\quad \frac{d\mu}{M},\quad \frac{d\nu}{N}$$

positiv zu nehmen.

Das Linienelement auf $\lambda = \lambda_0$ ist:

$$4\,ds^2 = \frac{(\nu-\mu)(\lambda_0-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\lambda_0-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\,d\nu^2.$$

Setzt man hierin aus Gleichung (6):

$$d\mu^2 = \frac{(\nu-\lambda_0)(\mu-\beta)(\mu-\gamma)(\mu-\alpha)}{(\mu-\lambda_0)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)}\,d\nu^2$$

ein, so kommt:

$$4\,ds^2 = \frac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda_0)(\alpha-\mu) + (\lambda_0-\nu)(\mu-\nu)(\nu-\alpha)}{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)}\,d\nu^2$$

$$= \frac{(\nu-\mu)^2(\nu-\lambda_0)}{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)}\,d\nu^2.$$

Da ds positiv sein muss, so wird, $\frac{d\nu}{N}$ wieder > 0 genommen:

$$2\,ds = \frac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda_0)}{N_{\lambda_0\alpha}}\,d\nu = \frac{(\nu-\mu)(\mu-\lambda_0)(\lambda_0-\nu)}{(\lambda_0-\mu)N_{\lambda_0\alpha}}\,d\nu.$$

Benutzt man jetzt Formel 8 § 9, indem man $\alpha = \lambda_0$, $b = \mu_0$ setzt, so folgt als Linienelement der geodätischen Linien auf λ_0:

$$2\,ds = \left(\frac{(\nu-\lambda_0)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}{N_{\lambda_0\alpha}} + \frac{(\lambda_0-\mu)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)}{N_{\lambda_0\alpha}}\right)\frac{d\nu}{\lambda_0-\mu}$$

oder nach (6):

$$ds = -\frac{(\mu_0-\mu)(\lambda_0-\mu)}{2N_{\lambda_0\alpha}}\,d\mu + \frac{(\mu_0-\nu)(\lambda_0-\nu)}{2N_{\lambda_0\alpha}}\,d\nu.$$

§ 11.

Linienelement und Gestalt der Krümmungscurven.

Wie oben bewiesen ist, schneiden sich die drei Flächenarten des Systems orthogonal. Nach dem Dupinschen Theorem sind die Schnittcurven zweier Flächenarten mit einem Paraboloid der dritten Art die Krümmungscurven des letzteren.

Wir erhalten ihr Linienelement daher direkt, indem wir in Gleichung 2 § 7 zwei Parameter constant nehmen. Setzen wir z. B. $\lambda = \lambda_0$ und $\mu = \mu_0$, also $d\lambda = 0$, $d\mu = 0$ kommt:

$$ds^2 = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)}{(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} \frac{d\nu^2}{4} = \frac{(\nu - \lambda_0)^2 (\nu - \mu_0)^2 d\nu^2}{4(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)}.$$

Das Linienelement ds_ν der Schnittcurve von λ_0 und μ_0 wird daher, da es positiv sein muss und $\frac{d\nu}{N} > 0$ ist

$$(1) \qquad ds_\nu = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)}{2 N_{\lambda_0 \mu_0}} d\nu.$$

Entsprechend ergeben sich

$$(2) \qquad ds_\mu = \frac{(\nu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)}{2 M_{\nu_0 \lambda_0}} d\mu$$

$$(3) \qquad ds_\nu = \frac{(\mu_0 - \lambda)(\nu_0 - \lambda)}{2 N_{\mu_0 \nu_0}} d\lambda.$$

Parallelprojection der Krümmungscurven.

Die Krümmungscurven erhalten wir als Schnittcurven zweier Flächen.

Die Gleichungen derselben seien:

$$\frac{y^2}{\beta - t_1} + \frac{z^2}{\gamma - t_1} + 2x + t_1 = 0,$$

$$\frac{y^2}{\beta - t_2} + \frac{z^2}{\gamma - t_2} + 2x + t_2 = 0.$$

Alle Punkte, welche beiden zugleich genügen, befriedigen auch die durch Subtraktion beider gefundene Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{y^2}{(\beta - t_1)(\beta - t_2)} + \frac{z^2}{(\gamma - t_1)(\gamma - t_2)} + 1 = 0.$$

Die durch den Schnitt der gegebenen Flächen bestimmte Krümmungscurve muss also ganz auf diesem mit der x-Achse parallelen Cylinder liegen. Die Schnitt-

curve des letzteren mit der Ebene $x = 0$ giebt uns daher die Parallelprojection der Krümmungscurven auf die y-z-Ebene. Diese Projectionscurve wird für den Schnitt einer Fläche λ und einer Fläche μ:

$$-\frac{y_2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\mu-\gamma)}=1, \qquad (5)$$

eine Hyperbel, deren Scheitelpunkt

$$z=\sqrt{(\gamma-\lambda)(\mu-\gamma)}$$

ist. Als Schnitt einer Fläche der zweiten mit einer der dritten Art findet man:

$$\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\nu-\beta)}-\frac{z^2}{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)}=1, \qquad (6)$$

eine Hyperbel mit dem Scheitelpunkt

$$y=\sqrt{(\beta-\mu)(\nu-\beta)}.$$

Die Schnittcurven der ersten und dritten Art sind:

$$\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\nu-\beta)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\nu-\gamma)}=1,$$

Ellipsen mit den Halbachsen

$$\sqrt{(\beta-\lambda)(\nu-\beta)} \text{ und } \sqrt{(\gamma-\lambda)(\nu-\gamma)}.$$

Um nun z. B. die Projectionscurven der zwei Arten der auf λ_0 verlaufenden Krümmungscurven zu finden, setzen wir in (5) und (7) $\lambda=\lambda_0$ und variieren μ respective ν. Die Krümmungscurven, für welche λ und μ constant sind, wollen wir ν-Curven, die andern entsprechend benennen. Die Projection der ν-Curven auf λ_0 sind daher Hyperbeln, die von der y-Achse aus sich mit wachsendem μ auf die beiden von den Punkten

$$z=\pm\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\beta-\gamma)}$$

ausgehenden Halbstrahlen der z-Achse zusammenziehen (vgl. Fig. IVa.).

Als Projectionen der μ-Curven auf λ_0 ergeben sich Ellipsen, die mit wachsendem ν, von der durch die beiden Punkte

$$z=+\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\beta-\gamma)} \text{ und } z=-\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\beta-\gamma)}$$

begrenzten Strecke beginnend, sich zu unendlicher Grösse erweitern.

Aehnlich lassen sich die Projectionen der auf μ_0 und ν_0 verlaufenden Krümmungscurven finden, welche respective durch die Figuren IVb und IVc veranschaulicht sein mögen.

§ 12.

Ueber den Verlauf der geodätischen Linien.

I. Nach § 10, 6 ist die Differentialgleichung der auf dem Paraboloid λ_0 verlaufenden geodätischen Linien:

$$(1) \qquad \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu^2}{(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\alpha)} + \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu^2}{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)} = 0.$$

Daraus folgt, dass $(\mu-\alpha)$ und $(\nu-\alpha)$ verschiedene Vorzeichen haben müssen, weil alle anderen Factoren positiv sind. Da aber $(\nu-\alpha)>(\mu-\alpha)$ ist, muss $\nu>\alpha>\mu$ sein. Unter Berücksichtigung der Grenzen von ν und μ finden wir: $+\infty > \alpha > \beta$.

Es kann daher α einen Wert μ_0 oder ν_0 annehmen, vorausgesetzt: $\mu < \mu_0$, $\nu > \nu_0$.

Die Tangente des Winkels, welchen die geodätische Linie mit der Curve $\mu = \text{const}$ bildet, ist bekanntlich:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{\frac{G}{E}}\cdot\frac{d\mu}{d\nu},$$

wo $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2$$

und $$G \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 \text{ ist.}$$

Da $$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(\beta-\lambda)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\mu)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\mu)}}$$

ist, ergiebt sich

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\mu)(\gamma-\mu) - (\beta-\lambda)(\beta-\nu)(\gamma-\mu) + (\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)(\beta-\mu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)},$$

$$E = \frac{1}{4} \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}.$$

Ebenso findet man

$$G = \frac{1}{4} \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}.$$

Nach (1) ist

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\alpha-\mu)}{(\mu-\lambda)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)}}$$

und wird daher

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\mu}}.$$

Das doppelte Vorzeichen zeigt, dass für jedes α durch den betrachteten Punkt zwei symmetrisch zu seiner μ-Curve (daher auch zu seiner ν-Curve) gelegene geodätische Linien hindurchgehen.

A. Nehmen wir zunächst

$$\alpha = \mu_0$$

an, so sehen wir, dass $\operatorname{tg}\omega$ für $\mu = \mu_0$ unendlich, aber nie 0 wird; die geodätische Linie kann daher die Curve $\mu = \mu_0$ berühren, aber keine andere ν- oder μ-Curve. Sie muss also, innerhalb des von den beiden Curven $\mu = \mu_0$ begrenzten Gürtels verlaufend, sich stets zwischen diesen beiden ohne umzukehren hinundherwinden und durchs Unendliche hindurchgehen (vgl. Fig. Va.). Es lassen sich daher an jede Krümmungscurve μ_0 von jedem Punkte der von ihren beiden Zweigen auf λ_0 eingeschlossenen Zone stets zwei und nur zwei geodätische Tangenten ziehen.

Wir wollen nun unter einer Querwindung die Länge der geodätischen Linie von einem Berührungspunkte mit

dem einen Zweige einer Krümmungscurve an bis zu dem andern und von diesem wieder zum ersten zurück, und unter einer Längswindung die Länge der von einem Punkte aus nach beiden Seiten sich bis ins Unendliche erstreckenden geodätischen Linie verstehen.

Integrieren wir die Differentialgleichung der geodätischen Linie, die sich nach m Quer- und n Längswindungen schliessen möge, so bekommen wir

$$4m\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{\mu-\lambda_0}{M}\,d\mu - 4n\int_{\beta}^{\infty}\frac{\nu-\lambda_0}{N}\,d\nu = 0,$$

da bei jeder Querwindung μ alle Werte zwischen μ_0 und γ viermal, und bei jeder Längswindung ν alle Werte zwischen β und ∞ auch viermal durchläuft. Da das zweite Integral ∞ gross, das erste aber endlich ist, so muss $m = \infty$ sein, die geodätische Linie daher ∞ viele Querwindungen machen.

B. Nehmen wir

$$\alpha = \nu_0,$$

so sehen wir, dass $\operatorname{tg}\omega = 0$ aber nicht $= \infty$ werden kann. Die geodätische Linie berührt daher von allen μ- und ν-Curven nur $\nu = \nu_0$. Auf ähnliche Weise wie vorhin ergiebt sich, dass die geodätische Linie sich ∞ oft um das Paraboloid herumwindet, bevor sie ins Unendliche geht (vgl. Fig. Vb.).

II. Auf dem Paraboloid $\nu = \nu_0$ ist der Verlauf der geodätischen Linien, wie man leicht einsieht, ein dem soeben behandelten Falle ganz analoger, nur dass die ganze Figur um 90° um die x^0-Achse gedreht erscheint.

III. Die Differentialgleichung der auf dem hyperbolischen Paraboloid verlaufenden geodätischen Linien ist:

$$\frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda^2}{(\beta-\lambda)\,(\gamma-\lambda)\,(\lambda-\alpha)}+\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu^2}{(\nu-\beta)\,(\nu-\gamma)\,(\nu-\alpha)}=0.$$

Hieraus folgt $\lambda<\alpha<\nu,$

daher $-\infty<\alpha<+\infty.$

Es kann α also alle Werte annehmen und daher gleich λ_0, μ_0, ν_0 sein, wobei $\lambda<\lambda_0$, $\nu>\nu_0$ ist.

A. Für $\alpha=\lambda_0$ kann $\operatorname{tg}\omega_1=\sqrt{\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\lambda}}$ gleich ∞, aber nicht gleich 0 werden. Die geodätischen Linien berühren daher nur die Krümmungscurve $\lambda=\lambda_0$ und verlaufen ausserhalb der Zone $\lambda_0\lambda_0$ wegen $\lambda<\lambda_0$. (Vgl. Fig. VI a.)

B. Für $\alpha=\nu_0$ wird $\operatorname{tg}\omega_1=0$, für $\nu=\nu_0$. Die geodätischen Linien berühren daher nur die Krümmungscurve $\nu=\nu_0$ und zwar von aussen wegen $\nu>\nu_0$. (Vgl. Fig. VI b.)

C. Für $\alpha=\mu_0$ kann $\operatorname{tg}\omega_1$ weder 0 noch ∞ werden. Die geodätischen Linien berühren überhaupt keine Krümmungscurve.

§ 13.

Ueber gewisse Combinationen der zweien Flächen gemeinsamen Tangenten mit den geodätischen Tangenten der Krümmungscurven.

Als Bedingungsgleichungen für das vom Punkte $\lambda\,\mu\,\nu$ ausgehende Linienelement $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ einer den Flächen λ_0 und μ_0 gemeinsamen Tangente hatten sich in § 8, 7 ergeben

$$\frac{\mu-\lambda}{A}\,d\lambda-\frac{(\nu-\mu)}{N}\,d\nu=0,\quad \frac{\mu-\lambda}{M}\,d\mu-\frac{\nu-\lambda}{N}\,d\nu=0,$$

$$\frac{\nu-\lambda}{A}\,d\lambda-\frac{\nu-\mu}{M}\,d\mu=0.\quad \text{(Vgl. Fig. VII.)}$$

Für das auf dieser Tangente liegende und vom Punkte $\lambda_0\,\mu\,\nu$ ausgehende Linienelement 0, $d\mu$, $d\nu$ fallen zwei dieser Gleichungen fort und man behält nur

$$\frac{\mu-\lambda_0}{M}\,d\mu-\frac{(\nu-\lambda)_0}{N}\,d\nu=0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der auf λ_0 verlaufenden und die Krümmungscurve $\lambda_0\,\mu_0$ berührenden geodätischen Tangenten. Ganz das entsprechende Resultat würde man auch für das vom Punkte $\lambda\,\mu_0\,\nu$ der Tangente ausgehende Linienelement gefunden haben. Somit ist folgender Satz bewiesen:

I. „Jede zweien Paraboloiden λ_0 und μ_0 gemeinsame Tangente tangiert zugleich in ihren beiden Berührungspunkten je eine geodätische Linie, die ihrerseits beide die durch den Schnitt der beiden Paraboloide entstehende Krümmungscurve berühren."

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

II. „Jede Tangente einer auf einem Paraboloid λ_0 oder μ_0 verlaufenden geodätischen Linie, welche die Krümmungscurve $\lambda_0\,\mu_0$ berührt, ist gemeinsame Tangente der beiden gegebenen Paraboloide."

Es sei also eine geodätische Tangente auf λ_0 an $\lambda_0\,\mu_0$ gegeben. Wir wollen nun annehmen, dass ihre Tangente in einem ihrer Punkte $\lambda_0\,\mu\,\nu$ das Paraboloid μ_0 nicht berühre. Da nun die Tangentialebene in diesem Punkte an λ_0 das Paraboloid μ_0 in einem Kegelschnitte schneidet, lassen sich durch $\lambda_0\,\mu\,\nu$ zwei gemeinsame Tangenten an λ_0 und μ_0 ziehen. Diese müssten nach dem obigen Satz I in $\lambda_0\,\mu\,\nu$ zwei geodätische Tangenten an $\lambda_0\,\mu_0$ berühren, und wir hätten durch $\lambda_0\,\mu\,\nu$ mehr als zwei solcher Linien, was, wie in § 12 gesagt ist, nicht möglich ist. Unsere Annahme ist also unrichtig und die Behauptung II somit bewiesen.

Es sei die Combination zweier confocaler Paraboloide, eines elliptischen λ_0 und eines hyperbolischen μ_0, gegeben.

Durch jeden Punkt $\lambda_0 \mu \nu$ des sichtbaren Teils der ersteren gehen dann, wie wir gesehen haben, zwei geodätische Tangenten der Durchdringungscurve $\lambda_0 \mu_0$. Die gradlinigen Tangenten an diese geodätischen Linien in $\lambda_0 \mu \nu$ berühren also zugleich das Paraboloid μ_0. Gehen wir von $\lambda_0 \mu \nu$ auf einen Punkt des Raumes $\lambda \mu \nu$ ausserhalb von λ_0 über, so spaltet sich jede Tangente in ein Paar in Bezug auf λ_0 conjugierte Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0. Diese berühren entweder beide zuerst λ_0 oder eine erst λ_0, die andere erst μ_0.

Im ersten Falle (vgl. Fig. VIII.) setzen sich die Tangenten auf λ_0 von A und A_1 aus durch zwei geodätische Linien fort, von denen die eine in B den einen Zweig der Durchdringungscurve, die andere den zweiten in B_1 berührt. Weil die geodätischen Linien nach § 12 unendlich viele Querwindungen machen erreichen beide geodätische Linien die Curve $\lambda_0 \mu_0$ im Endlichen, und können wir ausserdem noch die beiden Zweige der letzteren durch einen endlichen geodätischen Bogen $C C_1$ so fortlaufend verbinden, dass wir unter Hinzuziehung des unendlichen Bogens $C_1 \infty B_1$ des betreffenden Zweiges der Krümmungscurve $\lambda_0 \mu_0$ einen geschlossenen Weg erhalten, dessen einzelne Stücke überall mit Ausnahme des Punktes P stetig in einander übergehen.

Im zweiten Falle, wenn eine Tangente zuerst λ_0, die andere zuerst μ_0 berührt, setzen sich beide im Endlichen auf λ_0 geodätisch bis zu demselben Zweige der Durchdringungscurve $\lambda_0 \mu_0$ fort.

Wird letztere in den Punkten B und B' berührt, so erhalten wir wieder, wie im ersten Falle, durch Hinzunahme des unendlichen Bogens $B \infty B'$ der Durchdringungscurve $\lambda_0 \mu_0$ einen überall sich stetig ändernden geschlossenen Linienzug, von P um λ_0 bis P zurückgehend.

Dieser letztere besteht in beiden Fällen aus Stücken von Krümmungscurven, von geodätischen Linien, welche erstere berühren, und von gradlinigen Tangenten an

letztere, welche nach dem oben bewiesenen Satze daher gemeinsame Tangenten beider gegebener Paraboloide sind. Für ihre Linienelemente gelten daher folgende in den früheren Paragraphen abgeleiteten Gleichungen:

$$ds_\nu = \frac{d\nu}{\mathfrak{L}} \quad ,$$

$$ds_{\mu\nu} = \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} \quad ,$$

$$ds_{\lambda\mu\nu} = \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} .$$

Diese können wir daher durch

$$dS = \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \frac{d\nu}{\mathfrak{N}}$$

zusammenfassen, worin $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ dieselben Vorzeichen haben müssen wie $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, also jeder Term für sich positiv werden muss.

§ 14.

Fadenconstruction des elliptischen Paraboloids aus zwei gegebenen, einem elliptischen und einem hyperbolischen Paraboloid.

Um die sichtbare Zone $(\mu_0\ \mu_0)$ des elliptischen Paraboloides wollen wir uns einen geschlossenen, unendlich aber unveränderlich langen Faden geschlungen und durch einen beweglichen Punkt P (λ, μ, ν) des Raumes ausserhalb der beiden Flächen λ_0 und μ_0 gespannt denken. Es soll nun der Punkt P bewegt werden und dabei der Faden stets das elliptische und jede Hälfte des hyperbolischen Paraboloids je einmal berühren. In irgend einer den gestellten Anforderungen genügenden Gleichgewichtslage des Fadens wird seine geometrische Gestalt unter einen der in § 13 besprochenen Fälle zu sub-

sumieren sein und sein Linienelement sich in der folgenden Form ausdrücken:

$$dS = \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \frac{d\nu}{\mathfrak{N}}.$$

Die Länge des Fadens ist daher:

$$S = \int_{\lambda}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + \int_{\mu}^{\mu} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \int_{\nu}^{\nu} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}}.$$

Hierin ist jedes der drei Integrale vom Punkte $\lambda\,\mu\,\nu$ aus längs des ganzen Fadens bis zu demselben Punkte zurück zu erstrecken und sind bei der Integration für alle Längenelemente die positiven Werte zu nehmen.

Wie wir in § 9 gesehen haben, können die Tangenten an λ_0 kein zweites Paraboloid λ berühren, und da das degenerierte Paraboloid $\lambda = \gamma$ ganz innerhalb von λ_0 liegt und daher von dem Faden nicht geschnitten wird, so ändert $d\lambda$, also auch $\mathfrak{L}$, auf beiden Tangenten zwischen P und den Berührungspunkten mit $\lambda - \lambda_0$ sein Vorzeichen nicht. Es durchläuft also λ auf beiden Tangenten die Werte zwischen λ und λ_0 je einmal, und da jedes Integral in (1) positiv sein soll, ist:

$$\int_{\lambda}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}}.$$

Weil ferner beide Hälften von μ_0 von dem Faden berührt werden sollen, durchsetzt derselbe die beide Hälften trennende Ebene $\mu = \gamma$ zweimal, berührt aber kein hyperbolisches Paraboloid ausser $\mu = \mu_0$. Da das degenerierte hyperbolische Paraboloid $\mu = \beta$ ganz innerhalb von $\mu = \mu_0$ liegt, wird es nicht von dem Faden geschnitten, und ändert daher $d\mu$, also auch $\mathfrak{M}$, sein Vorzeichen nur in den beiden Schnittpunkten mit der Ebene $\mu = \gamma$ und in den beiden Berührungspunkten mit $\mu = \mu_0$, welche letzteren

beiden bei stetiger Durchlaufung des Fadens die beiden ersteren Punkte trennen. Es ist daher:

$$\int_{\mu}^{\mu} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} = 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} .$$

Da endlich der gespannte Faden das Innere $\nu = \beta$ der ganz innerhalb von $\mu = \mu_0$ gelegenen, rechts offenen Focalparabel schneiden muss, wird ν auf dem Faden von P aus bis ins Unendliche in einer Richtung von ν bis ∞ wachsen, in der zweiten von ν bis β abnehmen und dann bis ∞ zunehmen. Im Unendlichen selbst wird ν, wie aus § 6 hervorgeht, von ∞ bis β ab und wieder bis ∞ zunehmen, so dass ν bei der Durchlaufung des ganzen Fadens viermal alle Werte zwischen β nnd ∞ annimmt. Daher ist:

$$\int_{\nu}^{\nu} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} = 4 \int_{\beta}^{\infty} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} .$$

Die ganze Länge des Fadens drückt sich daher aus durch:

$$(2) \qquad S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + 4 \int_{\beta}^{\infty} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}}$$

oder ausführlich geschrieben durch:

$$(3) \qquad \begin{aligned} S = {} & 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\nu-\lambda_0)\,(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{2\sqrt{[(\beta-\lambda)\,(\gamma-\lambda)\,(\lambda_0-\lambda)\,(\mu_0-\lambda)]}} \\ & + 4 \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)\,(\mu_0-\mu)\,d\mu}{2\sqrt{[(\beta-\mu)\,(\mu-\gamma)\,(\mu-\lambda_0)\,(\mu_0-\mu)]}} \\ & + 4 \int_{\beta}^{\infty} \frac{(\nu-\lambda_0)\,(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{[(\nu-\beta)\,(\nu-\gamma)\,(\nu-\lambda_0)\,(\nu-\mu_0)]}} . \end{aligned}$$

Diese Funktion ist von den Coordinaten μ und ν des bewegten Punktes unabhängig. Lassen wir daher S constant und bewegen P, so dass er in der vorgeschriebenen Weise den Faden spannt, so muss auch λ constant, etwa $= c$ bleiben, d. h. der Punkt P beschreibt ein zu λ_0 confocales elliptisches Paraboloid $\lambda = c$. Natürlich wird nur der ausserhalb des Paraboloides $\mu = \mu_0$ gelegene Teil von $\lambda = c$ beschrieben.

Ausführen kann man die Construction, indem man die zwei Enden eines Fadens an zwei Punkte der Krümmungscurve $\lambda_0 \mu_0$ anheftet und ihn in der vorgeschriebenen Weise spannt. Diese Construction gilt natürlich nur, so lange der Faden noch auf beiden Seiten eine wenn auch kleine Länge mit der Krümmungscurve gemein hat.

Verkürzt man die Länge des Fadens, lässt aber dabei die Lage des auf λ_0 aufliegenden Teils unverändert, so rückt der Punkt P dem Paraboloide immer näher und fällt schliesslich auf dasselbe. Die Länge S_1 des so ganz auf λ_0 ausgespannten Fadens ergiebt sich aus (2), indem man $\lambda = \lambda_0$ setzt, als:

$$S_1 = 4 \int_{\gamma}^{\mu} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + 4 \int_{\beta}^{\infty} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}}. \qquad (4)$$

Die Fäden S und S_1 haben das Stück $A \infty A_1$ gemein. Wir finden als ihre Differenz:

$$S - S_1 = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}}, \qquad (5)$$

d. h. in Worten:

„Die Summe der von einem bei der Fadenconstruction in Betracht kommenden Punkte des Paraboloids $\lambda = c$ an $\lambda = \lambda_0$ in der geforderten Weise gezogenen Tangenten,

vermindert um die Länge des zwischen ihren Berührungspunkten gespannten Fadens ist constant und zwar gleich

$$\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0-\lambda)\,(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{[(\beta-\lambda)\,(\gamma-\lambda)\,(\lambda_0-\lambda)\,(\mu_0-\lambda)]}}.$$

Wenden wir (5) auf zwei Punkte P und P′ an und subtrahieren, so kommt:

$$S - S' = S_1 - S'_1,$$

d. h.: „Die Differenz der betreffenden, von zwei Punkten desselben Paraboloids λ ausgehenden Tangentenpaare ist gleich der Differenz der von ihnen auf λ_0 überspannten geodätischen Bogen."

§ 15.

Einige Specialfälle.

I. Construction der Krümmungscurven eines hyperbolischen Paraboloids.

Bewegt man den Punkt P nur auf dem gegebenen hyperbolischen Paraboloid μ_0, so erhält man die Durchdringungscurve der Paraboloide λ und μ_0, d. h. die Krümmungscurve $\lambda\mu_0$. Variiert man λ, d. h. die Länge des Fadens, so ergiebt die Construction alle ν-Curven des Paraboloids μ_0.

II. Fadenconstruction der Parabel.

Nimmt man $\mu_0 = \beta$, d. h. lässt man das hyperbolische Paraboloid in die x-y-Ebene übergehen, so rücken die beiden Zweige der Krümmungscurve $\lambda_0\mu_0$ in die Parabel zusammen, welche sich als Schnitt der x-y-Ebene mit λ_0 ergiebt. Der um die Zone $\mu_0\mu_0$ auf λ_0 herum gespannte Faden ist daher in diesem Specialfalle um die Parabel $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \gamma$ geschlungen und durch einen Punkt P in

der Ebene der Parabel gespannt. Durch Bewegen von P erhalten wir daher eine Fadenconstruction einer Parabel, die analog der in § 1 abgeleiteten ist.

III. Fadenconstruction eines elliptischen Paraboloids aus einem gegebenen elliptischen Paraboloide und dessen einer Focalparabel.

Setzt man in dem allgemeinen Falle $\mu = \beta$, d. h. lässt man das hyperbolische Paraboloid in das auf der convexen Seite der Focalparabel $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ gelegene doppelt zu zählende Ebenenstück degenerieren, so verbreitert sich die Zone $\mu_0 \mu_0$ auf λ_0 zur ganzen Oberfläche, und der bewegliche Punkt kann den ganzen Raum bestreichen. Wir erhalten daher in diesem Falle ein volles elleptisches Paraboloid λ. Die drei Integrale in der Formel für die Länge S des Fadens lassen sich hier in zwei zusammen ziehen und nehmen, indem man μ als Collectivbezeichnung für μ und ν gebraucht folgende Form an:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_1 - \lambda)\, d\lambda}{2 \sqrt{(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)}} + 4 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\sqrt{(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

IV. Fadenconstruction eines elliptischen Paraboloids aus einem gegebenen hyperbolischen Paraboloide und dessen einer Focalparabel.

Nimmt man in dem allgemeinen Falle $\lambda_0 = \gamma$, so degeneriert das gegebene elliptische Paraboloid in das doppelt zu zählende Ebenenstück, welches auf der concaven Seite der Focalparabel $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$ gelegen ist. In der auf beiden Seiten dieses Ebenenstückes zu zeichnenden parabolischen Schnittcurve mit $\mu_0 = \mu_0$ hat man die beiden Zweige der Krümmungscurve $\lambda_0 \mu_0$ zu erblicken. Die geodätischen Curven auf λ_0 werden zu gebrochenen Linien,

welche aus zwei Graden bestehen, von denen die eine, den einen Zweig der Durchdringungscurve tangierend, auf der einen Seite der Ebene der Focalparabel bis zu zu einem Punkte der letzteren läuft, und die andere von diesem Punkte aus auf der andern Seite der Ebene bis zu dem andern Zweige der Durchdringungscurve führt. Die Fadenlänge ist in diesem Falle

$$S = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{2\sqrt{(\beta-\lambda)\,(\mu_0-\lambda)}}$$

$$+4\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{(\beta-\mu)\,(\mu_0-\mu)}} + 4\int_{\beta}^{\infty} \frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{(\nu-\beta)\,(\nu-\mu_0)}}.$$

V. Fadenconstruction des elliptischen Paraboloids aus seinen beiden Focalparabeln.

Setzt man $\lambda=\gamma$ und $\mu=\beta$, so gehen die beiden gegebenen Paraboloide in die beiden in III und IV schon erwähnten Ebenenstücke über. Von den vier Focallinien, d. h. gemeinsamen Tangenten an beide Focalcurven von einem Punkte P aus, den wir, ohne die Allgemeinheit seiner Lage zu beschränken, in dem vorne oben gelegenen, durch die beiden Ebenen der Focalparabeln entstandenen Raumviertel annehmen können (vgl. Fig. IX.), schneiden zwei beide Parabeln im Endlichen, davon eine, etwa R'', die Focalparabel R in R_2 zuerst, die andere, etwa S'', die Parabel S in S_2 zuerst dann R in Q_2; eine dritte Focallinie, sie heisse R', liegt in der durch P mit der z-Ebene parallel gezogenen Ebene und schneidet R in R_1 im Endlichen, S im Unendlichen, und die vierte, S', läuft von P aus parallel mit der x-Achse und schneidet im Unendlichen zuerst S in S_1, dann R in Q_1. Setzen wir R'' von R_2 aus auf der untern x-y-Ebene geodätisch (hier also gradlinig) bis zum endlichen Scheitelpunkt von S und von hier bis

zu dem unendlich entfernten Schnittpunkt von S' mit R fort, so ist die Gestalt dieses Weges, unter Hinzunahme von S', die Lage eines um $\lambda = \gamma$ geschlungenen und von P so gespannten Fadens, dass beide durch $\lambda = \gamma$ getrennte Teile des hyperbolischen Paraboloids $\mu = \beta$ berührt werden.

Ebenso ergeben R' und S'' zusammen die Lage eines in derselben Weise gespannten Fadens, wenn wir beide, R' von R_1, S'' von Q_2 aus, gradlinig mit dem unendlich fernen Scheitelpunkt von S auf der untern Seite der x-y-Ebene verbinden. Die Länge des Fadens ergiebt sich in diesem Falle als

$$S = 2\int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2} + 4\int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\mu}{2} + 4\int_{\beta}^{\infty} \frac{d\nu}{2} = \gamma - \lambda + 2\int_{\gamma}^{\infty} d\mu.$$

Die Lage des gespannten Fadens ist aber nicht eindeutig bestimmt, da Q_2 auf der hinteren Hälfte von R willkürlich angenommen werden kann. Denn auf dem Wege von S_2 über irgend einen dieser Punkte nach dem unendlich fernen Scheitelpunkt von S durchläuft λ stets alle Werte von λ bis λ_0, μ geht von β bis γ und ν von β bis ∞ und dann wieder bis β. Die Grenzen der drei in der Gleichung für die Länge des Weges vorkommenden Integrale sind daher für alle Lagen dieselben, also auch ihre Längen. Wir können den Punkt Q_2 daher auch in den Scheitelpunkt von R verlegen (was wir im nächsten Paragraphen thun werden), und ebenso im Unendlichen uns den entsprechenden Punkt Q_1 im Scheitelpunkt von R liegend denken.

Zieht man in der Ebene der Parabel R eine ihre Achse im Innern senkrecht schneidende Grade, so muss der über R beliebig gemessene Abstand eines Punktes auf S von dieser Linie constant sein, und zwar gleich der Entfernung des Punktes auf S von dem Schnittpunkt der

Graden und der Parabel, so lange nur Q_2 und der unendlich ferne Scheitelpunkt von R auf verschiedenen Seiten der Graden liegen.

Aus dieser Eigenschaft zweier zusammengehöriger Focalparabeln ergiebt sich der entsprechende Satz in § 2 als specieller Fall, wenn wir den Punkt S_2 auf S in den Scheitelpunkt dieser, d. h. in den Brennpunkt der Parabel R verlegen.

§ 16.

Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

Die Focalparabeln eines Systems confocaler Paraboloide seien R und S (vgl. Fig. X). Wir wollen nun als die vier Focaldistanzen eines Punktes P in Bezug auf das gegebene System die Längen der kürzesten Wege bezeichnen, welche von P aus über jede Focalparabel zu den beiden Scheitelpunkten der jedesmaligen andern Focalparabel führen. Wir wollen dieselben mit r_1, r_2, s_1, s_2 bezeichnen, und zwar so, dass r_1 die über R nach dem unendlich fernen, r_2 die nach dem endlichen Scheitelpunkt führende, s_1 die über S nach dem unendlich fernen, s_2 die nach dem endlichen Scheitelpunkt von R führende Focaldistanz ist. Da man nach dem letzten Specialfall die Summe der Focaldistanzen r_1 und s_2 oder r_2 und s_1 vermehrt um die Entfernung der entsprechenden beiden Scheitelpunkte als Länge eines um die Focalparabeln in der geforderten Weise geschlungenen Fadens betrachten kann, so drücken sie sich durch die im vorigen Paragraphen abgeleitete Gleichung aus:

$$S = \pm \int \frac{d\lambda}{2} \pm \int \frac{d\mu}{2} \pm \int \frac{d\nu}{2},$$

worin jedes Integral für sich positiv sein muss.

Im besondern ergeben sich für die einzelnen Focaldistanzen unter Berücksichtigung der in § 6 angegebenen Coordinaten der unendlich entfernten Scheitelpunkte:

$$r_1 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2} + \int_\gamma^\mu \frac{d\mu}{2} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\nu^\infty \frac{d\nu}{2} + \int_\beta^\infty \frac{d\nu}{2},$$

$$s_1 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2} + \int_\mu^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\nu^\infty \frac{d\nu}{2} + \int_\beta^\infty \frac{d\nu}{2},$$

$$r_2 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2} + \int_\gamma^\mu \frac{d\mu}{2} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\beta^\nu \frac{d\nu}{2},$$

$$s_2 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2} + \int_\mu^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2} + \int_\beta^\nu \frac{d\nu}{2}.$$

Führt man die Integration bis auf ein unendlich grosses, aber constantes Integral aus, so erhält man:

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(-\lambda + \mu - \nu + 2\beta - \gamma\right) + \int_\beta^\infty d\nu,$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(-\lambda - \mu - \nu + 3\beta \quad\right) + \int_\beta^\infty d\nu,$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(-\lambda + \mu + \nu - \gamma\right),$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(-\lambda - \mu + \nu + \beta\right).$$

Durch Combination je zweier dieser Werthe findet man:

$$r_2 - s_2 = r_1 - s_1 = \mu - \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma\right),$$

$$r_1 + s_2 = r_2 + s_1 = -\lambda + \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma\right) + \int_\gamma^\infty d\nu,$$

$$r_1 - r_2 = s_1 - s_2 = -\nu + \beta + \int_\beta^\infty d\nu.$$

Diese letzten drei Gleichungen lassen sich nun durch folgende Sätze in Worte fassen:

I. Die Differenz der beiden endlichen oder unendlichen Focaldistanzen in Bezug auf ein System confocaler Paraboloide ist für alle Punkte eines hyperbolischen Paraboloides des Systems constant.

II. Die Summe der über verschiedene Focalparabeln nach dem endlichen und dem unendlichen Scheitelpunkt der jedesmaligen anderen führenden Focaldistanzen ist für jedes links offene elliptische Paraboloid des Systems constant.

III. Die Differenz der beiden über eine Focalparabel nach den beiden Scheitelpunkten der anderen führenden Focaldistanzen ist für jedes rechts offene elliptische Paraboloid des Systems constant.

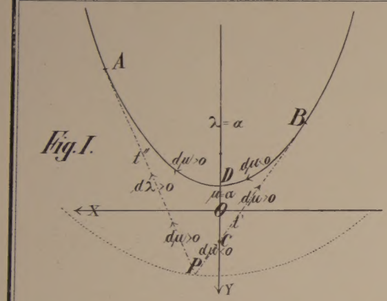

Fig. I.

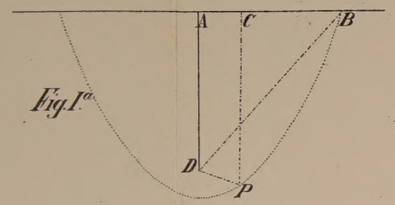

Fig. I.a

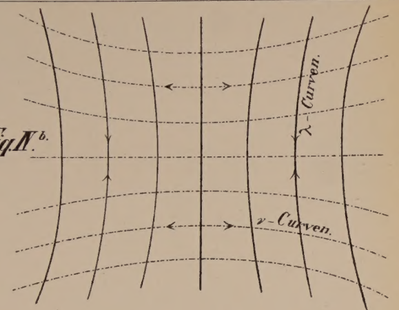

Fig. II.b

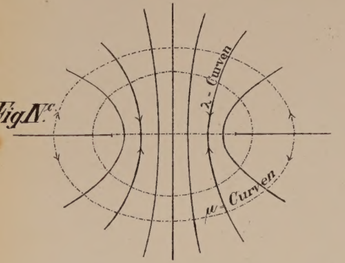

Fig. II.c

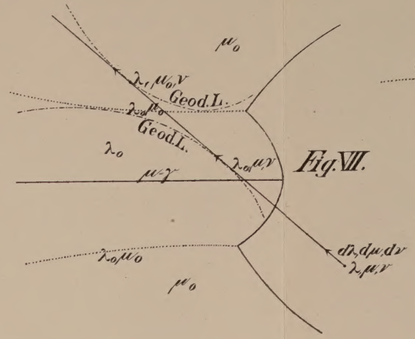

Fig. VII.

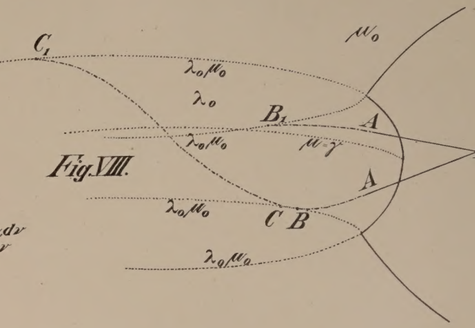

Fig. VIII.

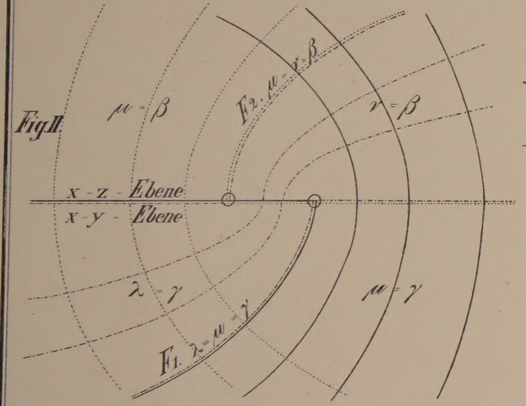

Fig. II

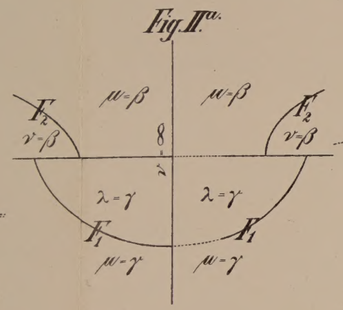

Fig. II.a

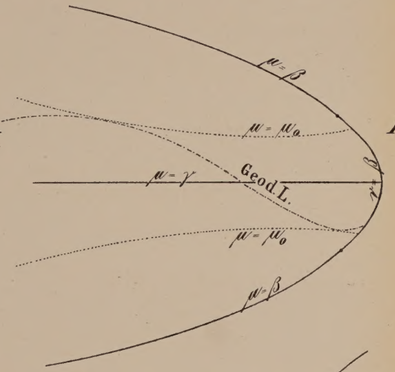

Fig. V.a

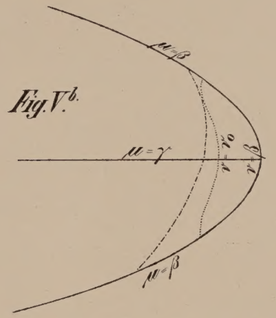

Fig. V.b

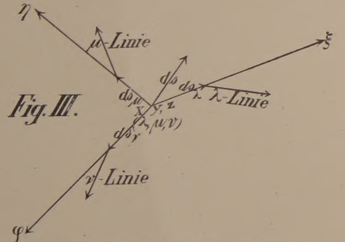

Fig. III.

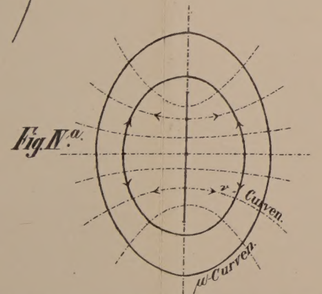

Fig. IV.a

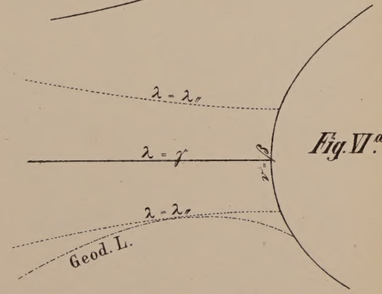

Fig. VI.a

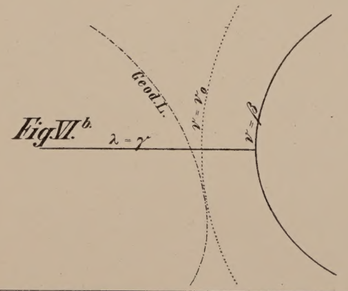

Fig. VI.b

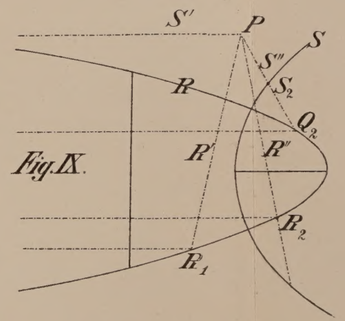

Fig. IX.

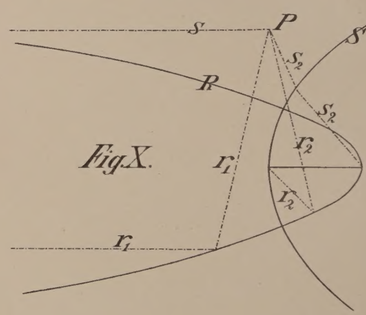

Fig. X.

Adler's Erben, Rostock.